2 関数の近似

2.1 超越関数の計算

コンピュータで実行できる演算は加減乗除の四則演算であるため，三角関数や指数関数に代表される超越関数を計算するためには，何らかの近似式を用いて計算する必要がある．プログラミング言語には代表的な超越関数が数学ライブラリとして用意されているが，それらの計算には四則演算と比較して長い処理時間を必要とする．

【練習問題 2-1】
四則演算と超越関数との処理時間にどのくらいの差があるかを，実際にプログラムを作成して確認してみよ．以下のリストは C 言語 (LSIC86) で三角関数の値を 1000 万回計算させた時の所要時間を出力させるプログラム例である．log, exp, cosh などの超越関数の処理時間を比較してみよ．使用できる超越関数は C 言語の場合，math.h のファイルの中に記載されている．

```
#include <stdio.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
void main(void)
{
      long n;
      time_t s1, s2;
      double result=0.0;
      s1 = time(NULL);
      for (n = 1; n <= 10000000 ; n++) {
            result = cos(1.2);
      }
      s2 = time(NULL);
      printf("実行時間 %ld \n", s2-s1);
}
```

コンピュータにおいては超越関数は何らかの方法で四則演算から成り立つ式–多項式–に変換されて実行されている．どのように超越関数を含む関数を多項式へと近似するかについてを以下に述べていく．

2.2 最良近似多項式

今，関数 f は有限な閉区間 $[a,b]$ において定義された連続関数とし，

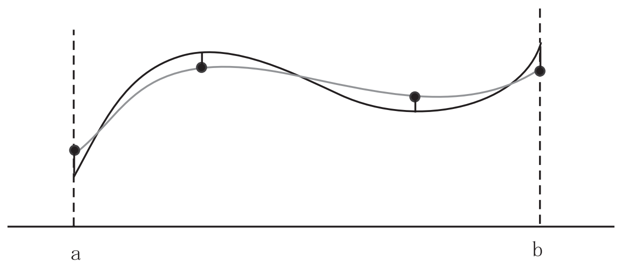
$$\| f - P \|_\infty \quad = \quad \max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \tag{2.1}$$

これは，閉区間 $[a,b]$ の中で f と P の最も大きな隔たりの大きさを意味している．この一様ノルムを用いて，以下の n 次多項式 $P^* \in \mathcal{P}_n$ を，f の n 次**最良近似多項式**とよぶ．

$$E_n(f) \quad = \quad \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \| f - P\|_\infty \tag{2.2}$$

任意の連続関数 f に関して，最良近似多項式には以下のことが成り立つ．

- f に対して n 次最良近似多項式 $P^* \in \mathcal{P}_n$ が存在する．
- n 次最良近似多項式 $P^* \in \mathcal{P}_n$ は一意に定まる．
- $P \in \mathcal{P}_n$ が f の n 次最良近似多項式であることの必要十分条件は，$|f(x_i) - P(x_i)| = \| f - P\|_\infty$ となり，符号が交互に交代する長さ $n+2$ の点列（交代偏差点列）$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} \leq b$ が存在することである．



【練習問題 2-2】
区間 $[0,1]$ の連続関数 $f(x) = x^2$ に対して，1 次最良近似多項式を求めてみよ．

具体的に最良近似多項式を求める手法としては，区間 $[a,b]$ 内に $n+2$ 点の標本点を選び，その標本点に関しての最良近似多項式を求めことを，誤差の一様ノルムが必要な精度内に納まるまでその処理を繰り返す **Remes の算法**がある．本講義ではその詳細は省略する[1]．

2.3 最小 2 乗近似式

関数に対して定義されるノルムとしては，以下のように定義される **2 乗ノルム**も良く用いられる．

$$\| g\|_{2,w} = \left(\int_a^b g(x)^2 w(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

ここで $w(x)$ は**重み関数**と呼ばれ，閉区間 $[a,b]$ において正の連続関数である．この 2 乗ノルムを用いて，

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_n} \| f - P\|_{2,w} \tag{2.4}$$

を満足する $P \in \mathcal{P}_n$ を**最小 2 乗近似式**（または n 次最小 2 乗近似多項式）とよぶ．また，区間 $[a,b]$ で定義される連続関数 $g_1, g_2 \in C[a,b]$ に関して，関数 g_1 と g_2 の内積を以下のように定義する．

$$(g_1, g_2)_w = \int_a^b g_1(x) g_2(x) w(x) dx \tag{2.5}$$

これより，2 乗ノルムと内積との間には，$\| g\|_{2,w}^2 = (g,g)_w$ の関係がある．
最小 2 乗近似式に関して以下に述べる定理が存在する．

定理： 任意の $f \in C[a,b]$ に対して n 次最小 2 乗近似式 $P^* \in \mathcal{P}_n$ が存在し，一意である．$P^* = \sum_{j=0}^n a_j R_j(x)$（$R_j(x)$ は $\mathcal{P}_n$ の適当な基底）の係数ベクトル $\mathrm{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T$ は，正規方程式と呼ばれる以下の連立 1 次方程式 $G\mathrm{a} = \mathrm{c}$ の解として定まる．

[1] 詳しくは森正武，室田一雄，杉原正顕著：数値計算の基礎（岩波講座 応用数学 [方法 1]）岩波書店の p.13–15 を参照．

$$\begin{pmatrix} (R_0,R_0)_w & \cdots & (R_0,R_j)_w & \cdots & (R_0,R_n)_w \\ (R_1,R_0)_w & \cdots & (R_1,R_j)_w & \cdots & (R_1,R_n)_w \\ \wr & & \wr & & \wr \\ (R_i,R_0)_w & \cdots & (R_i,R_j)_w & \cdots & (R_i,R_n)_w \\ \wr & & \wr & & \wr \\ (R_n,R_0)_w & \cdots & (R_n,R_j)_w & \cdots & (R_n,R_n)_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \wr \\ a_i \\ \wr \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,R_0)_w \\ (f,R_1)_w \\ \wr \\ (f,R_i)_w \\ \wr \\ (f,R_n)_w \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

ここで，最小 2 乗近似多項式による近似誤差の 2 乗ノルムを求めると以下のようになる．

$$\| f - P^* \|_{2,w} = \| f - \sum_{j=0}^{n} a_j^* R_j \|_{2,w} \tag{2.7}$$

$$= \sqrt{\| f\|_{2,w}^2 - \mathrm{c}^T G^{-1} \mathrm{c}} \tag{2.8}$$

多項式の基底として $R_j(x) = x^j$ を選んだ場合，$\mathrm{a}^* = G^{-1}\mathrm{c}$ を解くと数値計算が困難になることが多い．しかしながら，多項式の基底として次に述べる直交多項式系を選ぶと，$(R_i, R_j)_w = 0 \quad (i \neq j)$ となり，G の行列の中身が対角行列となる．すると，各 a_j^* は，$a_j^* = (f, R_j)_w / \| R_j \|_{2,w}^2$ となって直接に係数ベクトル a^* を求めることができる．

2.4　直交多項式系

一般に，多項式の族 $(R_n \mid n = 0, 1, 2, \cdots)$ で，区間 (a, b) において

$$(R_m, R_n)_w = 0 \quad (m \neq n); \quad degR_n = n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.9}$$

を満たすものは，区間 (a, b) における重み w に関する**直交多項式系**と呼ばれる．直交多項式系の例としては，以下のものがある．

区間 (a,b)	重み $w(x)$	直交多項式系の名称	表記の記号	$(R_n, R_n)_w$
$(-1,1)$	1	Legendre(ルジャンドル) 多項式	$P_n(x)$	$2/(2n+1)$
$(-1,1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	Chebyshev(チェビシェフ) 多項式	$T_n(x)$	$\pi/2(n \neq 0), \pi(n = 0)$
$(0,+\infty)$	$\exp(-x)$	Laguerre(ラゲール) 多項式	$L_n(x)$	1
$(-\infty,+\infty)$	$\exp(-x^2/2)$	Hermite(エルミート) 多項式	$H_n(x)$	$n!\sqrt{2\pi}$

直交多項式系のもつ主要な性質としては以下のことがある．

直交性　R_n は $n-1$ 次以下の任意の多項式と直交する．

一意性　最高次係数を決めると直交多項式系は一意に定まる．

零点の分布　$R_n(x)$ のすべての零点 (根) は，開区間 (a, b) にある実数で単純零点 (単根) である．R_n の零点を $z_1^{(n)} < z_2^{(n)} < \cdots < z_{n-1}^{(n)} < z_n^{(n)}$ とすると，$n \geq 1$ に対して，

$$a < z_1^{(n+1)} < z_1^{(n)} < z_2^{(n+1)} < z_2^{(n)} < \cdots < z_n^{(n+1)} < z_n^{(n)} < z_{n+1}^{(n+1)} < b \tag{2.10}$$

選点直交性　$z_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ を $R_n(x)$ の n 個の零点とするとき，$n-1$ 次以下の多項式 $R_l(x), R_m$ に関して以下が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{n} R_l(z_i) R_m(z_i) w_i = \delta_{lm} (R_m, R_m)_w \tag{2.11}$$

高次の $R_n(x)$ の零点を用いて，低次の係数 a_m を以下のように求めることができる．

$$a_m = \frac{1}{(R_m, R_m)_w} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) R_m(z_i) w(z_i) \tag{2.12}$$

ここでは，直交多項式系として Legendre 多項式と Chebyshev 多項式を紹介する．
Legengre 多項式 $P_n(x)$ は，以下に示す Rodrigues の公式により与えられる．

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^n (x-1)^n], \quad c_n = \frac{1}{2^n n!} \tag{2.13}$$

これは，直交多項式系の持つ性質である 3 項漸化式の形式で書くと，次のように書くことができる．

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.14}$$

【練習問題 2-3】
Legendre 多項式の $P_2(x)$，$P_3(x)$ を求めよ．また，$P_i(x) \quad (i = 0, \ldots, 3)$ を $(-1, 1)$ の範囲でグラフを描き，相異なる多項式が直交していることを確かめよ．

一方，Chebyshev 多項式は以下の式で与えられる．

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{2.15}$$

この式の右辺は n 次多項式となり，その最高次係数が $k_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 1), \quad 0 \quad (n = 0)$ で与えられる．
また，$x = \cos\theta$ とすると，

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \tag{2.16}$$

が成り立つ．また，$T_n(x)$ の零点が常に

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.17}$$

のように容易に求めることができる．
二つの多項式 $T_m(x)$ と $T_n(x)$ の間の直交関係の成立を確認してみると，

$$\int_{-1}^{1} T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta) d\theta \tag{2.18}$$

右辺は三角関数の直交性から明らかなように，$m \neq n$ のとき 0，$m = n = 0$ のとき π，$m = n \neq 0$ のとき $\pi/2$ となり，確かに直交性が成り立っている．
Chebyshev 多項式は以下の 3 項漸化式として定義される．

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x; \quad T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{2.19}$$

この漸化式は，先ほどの三角関数への変数変換で記述すると，

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta \tag{2.20}$$

という三角関数の書き換え公式が導かれる．

【練習問題 2-4】
Chebyshev 多項式の $T_2(x)$，$T_3(x)$ を求めよ．また，$T_i(x) \quad (i = 0, \ldots, 3)$ を $(-1, 1)$ の範囲でグラフを描き，相異なる多項式が直交していることを確かめよ．