2 関数の近似／補遺

【練習問題 2-1】

ここでは Java によるプログラミング例を以下に示す.

```
import java.applet.Applet;
import java.awt.Font;
import java.awt.Graphics;
import java.util.Date;

public class TimeCalc extends Applet {
   public void paint(Graphics g)
   {
// 計算を始める前の時間を取得
      Date initTime=new Date();
      double result = 0.0;
      for(double x=0.000001; x<1.0; x+=0.000001)
      {
// 実行したい計算の部分のコメント記号を消去する
//        result = Math.exp(x);
//        result = Math.log(x);
//        result = Math.cos(x);
//        result = x+1.0;
     result = Math.pow(2.0, x);
      }
// 計算が終わった時の時間を取得
      Date finalTime=new Date();
// 計算に要したおおよその時間を計算
      long deltaTime=finalTime.getTime() - initTime.getTime();
      Font f = new Font("Serif", Font.BOLD, 36);
      g.setFont(f);
      g.drawString("time: "+deltaTime, 10, 40);
   }
}
```

【練習問題 2-2】

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = ax + b$$

$$\| f(x) - g(x) \|_\infty = \| x^2 - ax - b \|_\infty$$

とする. $r(x) = \| x^2 - ax - b \|_\infty$ とする. 最良近似多項式が 1 次式により得られるとき, 交代偏差点列の数は $1 + 2 = 3$ となる.

$$\frac{\partial r(x)}{\partial x} = 0$$

より，$2x - a = 0, x = a/2$ が最大の偏差を与える点の一つとなり，そのほかは端点の $x = 0, x = 1$ となる．よって，$r(0) = r(1) = -r(-a/2)$ を連立方程式として解くと，

$$a = 1, b = -\frac{1}{8}$$

が得られる．よって，１次最良近似多項式は

$$g(x) = x - \frac{1}{8}$$

となる．

【練習問題 2-3】
Legendre 多項式の $P_2(x), P_3(x)$ は以下のように求められる．

$$P_2(x) = \frac{2+1}{1+1}xP_1(x) - \frac{1}{1+1}P_0(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

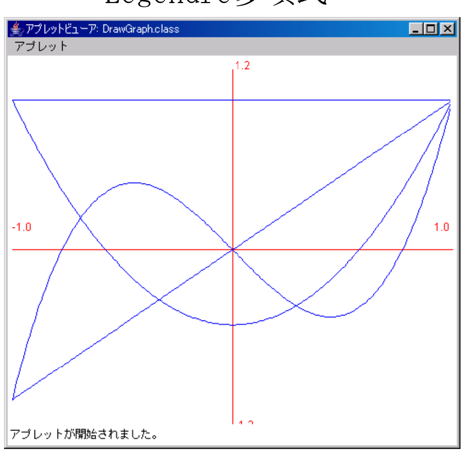
$$P_3(x) = \frac{4+1}{2+1}xP_2(x) - \frac{2}{2+1}P_1(x) = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2}x(3^2 - 1) - \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x(5x^2 - 3)$$

【練習問題 2-4】
Chebyshev 多項式の $T_2(x), T_3(x)$ は３項漸化式から次のように求めることができる．

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

Legendre多項式



Chebyshev多項式