5　線形方程式の数値解法／補遺

【練習問題 5-1】
以下の連立一次方程式をガウスの消去法により解いてみよ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

1 行目の 1/2 倍したものを 2 行目から引き，1 行目の 2 倍したものを 3 行目から引くと，

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -7 \\ -35 \end{bmatrix}$$

つぎに，2 行目を 7/3 倍したものを 3 行目から引くと

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -0 & -56/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -7 \\ -56/3 \end{bmatrix}$$

を得る.（前進消去）　ここで，x_3 から順にといて行くと，$x_3 = 1, x_2 = 3, x_1 = 5$ を得る.（後退代入）

【練習問題 5-2】
先の問題の LU 分解をドゥリットル法で求めてみる.
【ステップ１】

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 4/2 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

【ステップ２】
$k = 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_{2,2}^{(2)} &= a_{2,2} - l_{2,1}u_{1,2} = (-1) - (1/2)(4) = -3 \\ u_{2,2} &= a_{2,2}^{(2)} = -3 \\ a_{3,2}^{(2)} &= a_{3,2} - l_{3,1}u_{1,2} = 1 - (2)(4) = -7 \\ u_{2,3} &= a_{2,3} - l_{2,1}u_{1,3} = 5 - (1/2)(6) = 2 \\ l_{3,2} &= \frac{a_{3,2}^{(2)}}{u_{2,2}} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$k = 3$ のとき，

$$\begin{aligned} a_{3,3}^{(3)} &= a_{3,3} - l_{3,1}u_{1,3} - l_{3,2}u_{2,3} = (-2) - (2)(6) - (\frac{7}{3})(2) = -\frac{56}{3} \\ u_{3,3} &= a_{3,3}^{(3)} = -\frac{56}{3} \end{aligned}$$

以上より，L, U は

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{56}{3} \end{bmatrix}$$

【練習問題 5-3】
ヤコビ法で解いてみる．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad M^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 \\ 1.04 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.04 \\ 1.04 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.008 \\ 0.992 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

式の入れ替えをすると，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad M^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 26 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -134 \\ 136 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となり，結果が大きく異なることがわかる．