

## 7 常微分方程式の数値解法

### 7.1 一階常微分方程式の数値解法の概要

未知の関数とその導関数を含む方程式を微分方程式 (differential equation) とよび、導関数の次数の最大が  $N$  のとき、 $N$  階微分方程式という。また、未知関数が 1 個の独立変数のみを含むとき、常微分方程式 (ordinary differential equation) とよぶ。また複数の独立変数を含む場合は偏微分方程式 (partial differential equation) という。ここでは、もっとも基本となる一階常微分方程式を扱うこととする。

独立変数  $x$  と、その関数  $y(x)$  に関して、

$$y' = f(x, y) \quad (7.1)$$

が与えられているとする。ここで  $y'$  は  $y$  の  $x$  に関する一階微分  $dy/dx$  であり、 $f(x, y)$  はその微分を  $x$  と  $y$  の式によって表したものである。いま、初期値  $y_0 = y(x_0)$  が与えられたとき、区間  $[x_0, x_n]$  における  $y(x)$  の値を数値的に求める初期値問題 (initial-value problem) を考える。

区間  $[x_0, x_n]$  が幅  $h$  の均等な  $n$  個の区間に分割されているとしたとき、次の式がなりたつ。

$$y(x_{n+1}) = y_i(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \quad (7.2)$$

ここで、 $y_i(x_i)$  は  $y(x_i)$  の数値解である。上の式の右辺第二項の積分をいかにして精度良く、かつ効率的に数値計算するか、ということが、この常微分方程式の数値解法の目的となる。

常微分方程式の数値解法の分類としては、

1 段法：  $y_{i+1}$  の計算に  $x_i, y_i, h$  のみを用いるもの。代表例としてはオイラー法、修正オイラー法、ルンゲ・クッタ法など

多段法：  $y_{i+1}$  の計算に  $y_i$  の前段の  $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots$  を用いるもの。代表例としてはアダムス・バッシュフォース法、アダムス・ムルトン法など。

に大きく分けることができる。ここではそれぞれの代表的な手法について見ていくことにする。

### 7.2 オイラー法

オイラー法とは、式 (7.2) を

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (7.3)$$

により  $y_{i+1}$  を逐次計算していくものである。これは式 (7.2) の右辺第二項の積分を、幅  $h$  高さ  $f(x_i, y_i)$  の矩形の面積で近似していることに他ならない。

これは、 $y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$  を  $x_i$  まわりにテイラー展開して得られる式

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \dots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(x_i) + \dots \quad (7.4)$$

において、一次の項までの式と等しい ( $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$  である。) よって、オイラー法の打ち切り誤差は  $h^2$  のオーダーとなる。

#### 【練習問題 7-1】

次の常微分方程式に関してきざみ幅  $h = 0.1$  として  $x = 0.5$  のときの  $y$  を求めよ。

$$y'(x) = y, \quad y(0) = 1.0$$

ちなみに、この常微分方程式の解析解は  $y(x) = e^x$  であり、 $y(0.5) = e^{0.5} = 1.648721 \dots$  である。

### 7.3 修正オイラー法

オイラー法が式 (7.2) の積分の項を矩形で近似して計算したのに対して，修正オイラー法は台形で近似を行う．

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})) \quad (7.5)$$

で計算を行うものである．ただし，この式の右辺には  $y_{i+1}$  が含まれているために，このままで計算ができない．そこで，この右辺の  $y_{i+1}$  を先に述べたオイラー法で予測（近似）した値  $y_{i+1}^p$  を求め，その値を用いて計算をする．

$$y_{i+1}^p = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (7.6)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^p)) \quad (7.7)$$

修正オイラー法は先ほど述べたテイラー展開の 2 次までの項の展開結果と等しい内容をもつ．

#### 【練習問題 7-2】

先の次の常微分方程式の初期値問題を修正オイラー法で解いてみよ．

### 7.4 ルンゲ・クッタ法

常微分方程式の初期値問題の数値解法としてもっとも一般的に用いられるのは，以下にしめす 4 次のルンゲ・クッタ法 (Runge-Kutta method) である．

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7.8)$$

$$\text{ただし,} \quad (7.9)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \quad (7.10)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2) \quad (7.11)$$

$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2) \quad (7.12)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \quad (7.13)$$

4 次のルンゲ・クッタ法は 4 次までのテイラー展開法と等価であり，打ち切りの誤差のオーダーは  $h^5$  となり，計算精度が高い．ただし，オイラー法と比較すると一つの  $y_i$  の計算に際して  $f(x, y)$  の計算が 4 回必要となるため，計算負荷は高くなる．

### 7.5 アダムス・バッシュフォース法

次に多段法のひとつであるアダムス・バッシュフォース (Adams–Bashforth) 法について説明をする．この方法は過去何点かの  $f$  の値を用いて区間  $[x_i, x_{i+1}]$  の  $f$  の値を外挿して求める方法であり， $k$  段法の場合（過去  $k$  点使用の場合）には，

$$y_{i+1} = y_i + h(\beta_1^k f_i + \beta_2^k f_{i-1} + \cdots + \beta_k^k f_{i-k+1}) \quad (7.14)$$

のように，各  $f_j$  の値に重み  $\beta_{i-j+1}^k$  をかけて総和をとることでオイラー法の  $f_i = f(x_i, y_i)$  よりもよい積分の近似を得ようとするものである．

今,  $k = 2$  の場合-2 段法-を考える. 2 段法では区間  $[x_i, x_{i+1}]$  の  $f$  の値を  $(x_{i-1}, f_{i-1})$  と  $(x_i, f_i)$  を結ぶ直線によって外挿することから,

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{3}{2}f_i - \frac{1}{2}f_{i-1}\right) \quad (7.15)$$

で与えられる. アダムス・バッシュフォース法の  $k$  段の場合の係数を以下に示す.

$k$	$\beta_1^k$	$\beta_2^k$	$\beta_3^k$	$\beta_4^k$	$\beta_5^k$
2	3/2	-1/2			
3	23/12	-16/12	5/12		
4	55/24	-59/24	37/24	-9/24	
5	1901/720	-2774/720	2616/720	-1274/720	251/720

多段法の場合には, 最初に計算の段数  $k$  個のデータの組み  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) が必要であるため, それらは修正オイラー法やルンゲ・クッタ法などの 1 段法などにより求めておく.

## 7.6 アダムス・ムルトン法

アダムス・バッシュフォース法が外挿に基づいていたのに対して, 別の多段法であるアダムス・ムルトン (Adams-Moulton) 法は内挿を用いている. これは, 区間  $[x_i, x_{i+1}]$  の間の  $f$  の値を,  $f_{i+1}, f_i, \dots, f_{i-k+2}$  までの  $k$  個の値を用いて内挿して求めるものである. 式としては,

$$y_{i+1} = y_i + h(\gamma_1^k f_{i+1} + \gamma_2^k f_i + \dots + \gamma_k^k f_{i-k+2}) \quad (7.16)$$

で与えられる.  $k = 2$  のときには,

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{1}{2}f_{i+1} + \frac{1}{2}f_i\right) \quad (7.17)$$

で与えられる.

アダムス・ムルトン法と先ほどのアダムス・バッシュフォース法との大きな違いは, 式の中に  $f_{i+1}$  が含まれている点である.  $f_{i+1}$  の計算には  $y_{i+1}$  が必要である. そのため, まず別の方法で  $y_{i+1}$  の近似値  $y_{i+1}^c$  を求めて,  $f_{i+1}$  と  $y_{i+1}$  を求める. そのようにして求められた  $y_{i+1}$  を  $y_{i+1}^p$  として, また公式に代入して  $y_{i+1}^c$  を再計算する. そうした計算を  $|y_{i+1}^p - y_{i+1}^c|$  が  $\epsilon$  以下になるまで, 繰り返すことで精度を高めていく手法である. アダムス・ムルトン法の係数を以下にまとめる.

$k$	$\gamma_1^k$	$\gamma_2^k$	$\gamma_3^k$	$\gamma_4^k$	$\gamma_5^k$
2	1/2	1/2			
3	5/12	8/12	-1/12		
4	9/24	19/24	-5/24	1/24	
5	251/720	646/720	-264/720	106/720	-19/720

## 7.7 連立 1 階常微分方程式

つぎに, 独立な変数  $x$  に対して,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  なる  $n$  個の変数について以下のような常微分方程式が与えられているとする.

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (7.18)$$

これは、上記の連立方程式をベクトル表現して、

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad (7.19)$$

とした場合、これまでの議論をそのまま適用できる。たとえば、オイラー法は、

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i) \quad (7.20)$$

となり、4次のルンゲ・クッタ法は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (7.21)$$

## 7.8 高階常微分方程式

これまで1階の常微分方程式を考えてきたが、最後に2階以上の常微分方程式の数値解法について概要を述べることにする。高階の常微分方程式の初期値問題は次のように定式化される。

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (7.22)$$

$$\text{ただし、初期値として } y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (7.23)$$

ここで、 $y$  の  $i$  階の導関数  $y^{(i)}$  に対して変数を割り当てて、 $z_i(x) = y^{(i)}(x)$  とする。すると、先の高階常微分方程式はつぎのような連立一階常微分方程式となる。

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= z_2(x) \\ z_2'(x) &= z_3(x) \\ &\dots \dots \dots \\ z_{n-1}'(x) &= z_n(x) \\ z_n'(x) &= f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{aligned} \quad (7.24)$$

また、初期値は

$$z_1(x_0) = y_0, z_2(x_0) = y'_0, z_n(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (7.25)$$

となる。このように、高階の常微分方程式は導関数の階数ごとに変数を導入することで連立一階常微分方程式の初期値問題に置き換えることができる。それによって先に述べた連立一階常微分方程式の数値解法を用いて計算することができる。

独立な変数が複数になった場合の偏微分方程式の数値解法に関しては、偏微分方程式の形式ごとにさまざまな数値解法が提案されている。これらについては本講義では省略する。

### 【練習問題 7-3】

以下の運動方程式を連立1階常微分方程式の形式に書きかえよ。

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (7.26)$$

## 参考文献

川崎晴久著：C&FORTRANによる数値解析の基礎、共立出版 ISBN4-320-02643-8