7　常微分方程式の数値解法／補遺

【練習問題 7-1,2】ほか
次の常微分方程式に関してきざみ幅 $h = 0.1$ として $x = 0.5$ のときの y を求めよ．

$$y'(x) = y, \quad y(0) = 1.0$$

ちなみに，この常微分方程式の解析解は $y(x) = e^x$ であり，$y(0.5) = e^{0.5} = 1.648721\cdots$ である．

オイラー法，修正オイラー法，ルンゲクッタ法，アダムス・バッスフォース法，アダムス・ムルトン法で解いてみた結果を以下に表で示す．

【練習問題 7-3】
以下の運動方程式を連立１階常微分方程式の形式に書きかえよ．

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{1}$$

これに対して，$x_1(t) = x(t)$，$x_2(t) = \dot{x}(t)$ のように変数の置き換えをすると次のような連立１階常微分方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) &= -\frac{k}{m}x_1 \end{aligned}$$

この連立１階常微分方程式を，$m = 1.0, k = 10.0$ とし，初期値を $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.0$ として，$\Delta t = 0.05$ のきざみで $t = 5$ まで 100 ステップを計算した場合を，図に示す．図からみて判るとおり，オイラー法で計算した場合は，計算の誤差のために振動の振幅がだんだんと大きくなってしまっているのがわかる．また，修正オイラー法の場合には，ほぼ同じ振幅で単振動している様子がみてとれる．

表 1:【オイラー法】　$x = 0.5$ での誤差：0.038

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1.00000	1.10000	1.21000	1.33100	1.46410	1.61051

表 2:【修正オイラー法】　$x = 0.5$ での誤差：0.0013

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y^p	1.00000	1.10000	1.21550	1.34313	1.48416	1.63999
y	1.00000	1.10500	1.22103	1.34923	1.49090	1.64745

表 3: 【ルンゲクッタ法】　$x = 0.5$ での誤差：6.32×10^{-7}

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1.00000	1.10517	1.22140	1.34986	1.49182	1.64872
k_1	0.10000	0.11052	0.12214	0.13499	1.49182	
k_2	0.10500	0.11052	0.12825	0.14174	0.15664	
k_3	0.10525	0.11632	0.12855	0.14207	0.15702	
k_4	0.11053	0.12215	0.13500	0.14919	0.16488	

表 4: 【アダムス・バッシュフォース法】　$x = 0.5$ での誤差：0.0028

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y^p	1.00000	1.10000				
y	1.00000	1.10500	1.22075	1.34861	1.48987	1.64592

表 5: 【アダムス・ムルトン法】　$x = 0.5$ での誤差：-0.00055

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y^p	1.00000	1.10000				
y_0	1.00000	1.10500	1.21579	1.34372	1.48513	1.64143
f_1	1.00000	1.10500	1.21579	1.34372	1.48513	1.64143
y_1	1.00000	1.10525	1.22131	1.34984	1.49190	1.64980
f_2	1.00000	1.10525	1.22131	1.34984	1.49190	1.64980
y_2	1.00000	1.10526	1.22159	1.35015	1.49223	1.64928

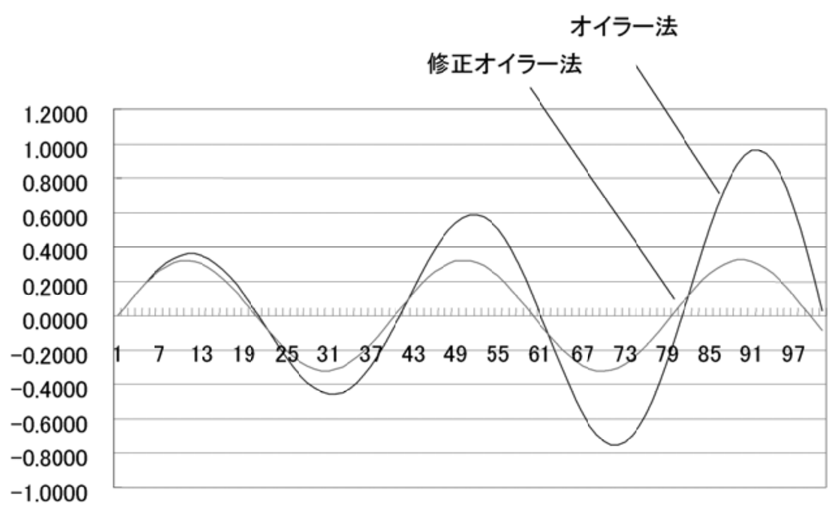

図 1: バネでつながれた物体の振動に対する連立１階常微分方程式の数値解