10　非線形計画法（II)：制約付き問題の最適化法

今回の講義では，制約のついた非線形計画問題に関する解法として，制約なし問題に変換して解く変換法 (transformation method) について説明していく．

10.1　制約付き最適化問題

制約付き最適化問題の定式化として，次のものを考える．

$$\text{最小化} \;\; ; \quad f(\boldsymbol{x}) \tag{10.1}$$

$$\text{条　件} \;\; ; \quad \boldsymbol{x} \in V \subset \boldsymbol{R}^n \tag{10.2}$$

$$V = \{\boldsymbol{x} | g_i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i = 1, \ldots, m;\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, l\} \tag{10.3}$$

$g_i(\boldsymbol{x}) \le 0$ は連続な不等式制約，$h_j(\boldsymbol{x}) = 0$ は連続な等式制約である．また，許容領域 V は閉集合とする．

ここでは，制約付き最適化問題の目的関数を拡張することで，制約なし最適化問題に変換する方法を説明する．

10.2　外点ペナルティ関数法

外点ペナルティ関数法 (exterior penalty function method) では次のような目的関数の拡張を施す．

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \psi(g_i(\boldsymbol{x})) + \sum_{j=1}^{l} \tilde{\psi}(h_j(\boldsymbol{x})) \tag{10.4}$$

$$\psi(s) = \{\max(0,\ s)\}^{\alpha},\ \alpha \ge 0 \tag{10.5}$$

$$\tilde{\psi}(s) = |s|^{\alpha},\ \alpha \ge 0 \tag{10.6}$$

通常，$\alpha = 2$ と設定されることが多い．このようにして作られた関数 $\Psi(\boldsymbol{x})$ は，

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = 0,\ (x) \in V \tag{10.7}$$

$$\Psi(\boldsymbol{x}) > 0,\ (x) \notin V \tag{10.8}$$

という条件を満たすとき，領域 V に関する**外点ペナルティ関数** (exterior penalty function) という．また，外点ペナルティ関数 $\Psi(\boldsymbol{x})$ とパラメータ $r \in \boldsymbol{R}$ で作られる関数

$$F(\boldsymbol{x},\ r) = f(\boldsymbol{x}) + r\Psi(\boldsymbol{x})$$

を元の問題に対する**拡張目的関数** (augmented objective function) とよぶ．いま，r を $r_0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots$ のように狭義単調増加して無限大に発散する正の数列として考えると，各 k に関して，

$$(E^k) \qquad \text{最小化} \qquad F(\boldsymbol{x},\ r_k),\ \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$$

という，制約なし最適化問題の列を作ることができる．この最適化問題の解の列を $\{\boldsymbol{x}_k\}$ とすると，適当な条件のもとで $k \to \infty$ に従ってもとの問題の最適解に収束することが知られている．

この方法では，$\boldsymbol{x} \in V$ であれば，外部ペナルティ関数の影響は受けない．また，$\boldsymbol{x} \notin V$ の場合，r_k が小さいうちはペナルティは小さいが，r_k が大きくなると，V の中に近似解が入り，V の外にはでなくなる．

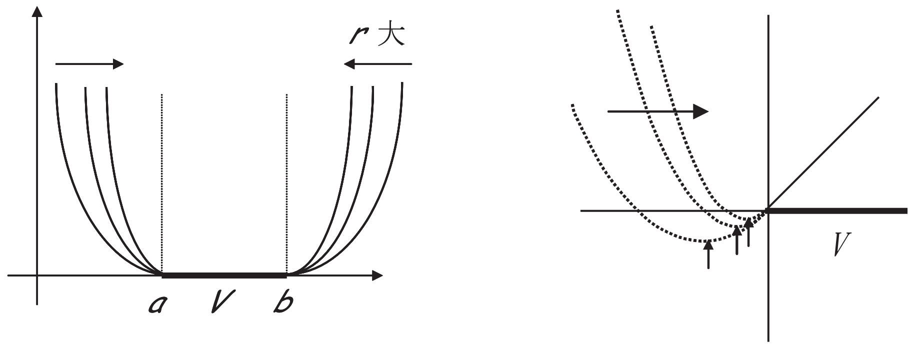

図 10.1: 外点ペナルティ関数（左）と目的関数の系列（右）

図 10.1(右) は,

$$\text{最小化} \quad : \quad f(x) = x \tag{10.9}$$

$$\text{制　約} \quad : \quad g(x) = -x \leq 0 \tag{10.10}$$

に対して外点ペナルティ関数法を適用した時の解の変化の様子を示したものである．最適解の 0 に向けて，許容解集合 V の外から接近していることがわかる．

【練習問題 10-1】
$x_1,\ x_2$ の 2 変数に関する制約つき非線形最適化問題

$$\text{最小化} \quad : \quad f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ x_2) = x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 \tag{10.11}$$

$$\text{制　約} \quad : \quad g_1(x_1,\ x_2) = -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \tag{10.12}$$

を外点ペナルティ関数法で解いてみよ．

10.3　内点ペナルティ関数法

外点ペナルティ関数法が近似解の列 $\{\boldsymbol{x_k}\}$ を許容解 V の範囲へと外から追い込んでいったのに対して，V の内側から徐々に V 全体へと拡張していくのが**内点ペナルティ関数法** (interior penalty function method) である．内点法では制約の条件として不等式制約のみを扱うものとする．内点ペナルティ関数とは,

$$\boldsymbol{x} \in \mathrm{int}V \text{ のとき, } \Phi(\boldsymbol{x}) \geq 0 \tag{10.13}$$

$$\boldsymbol{x} \to \partial V \text{ のとき, } \Phi(\boldsymbol{x}) \to \infty \tag{10.14}$$

ただし，$\mathrm{int}V$ は閉集合 V の内部，∂V は V の境界を表す．内点ペナルティ関数としては，例えば,

$$\Phi(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \varphi(g_i(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathrm{int}V \tag{10.15}$$

$$\varphi(s) \quad = \quad (-s)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,\ s < 0 \tag{10.16}$$

通常，$\alpha = 1$ または 2 とする．この内点ペナルティ関数を用いて，外点の場合と同様に拡張目的関数を定義する．

$$\text{最小化} \quad F(\boldsymbol{x},\ t_k) \quad = \quad f(\boldsymbol{x}) + t_k\Phi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathrm{int}V$$

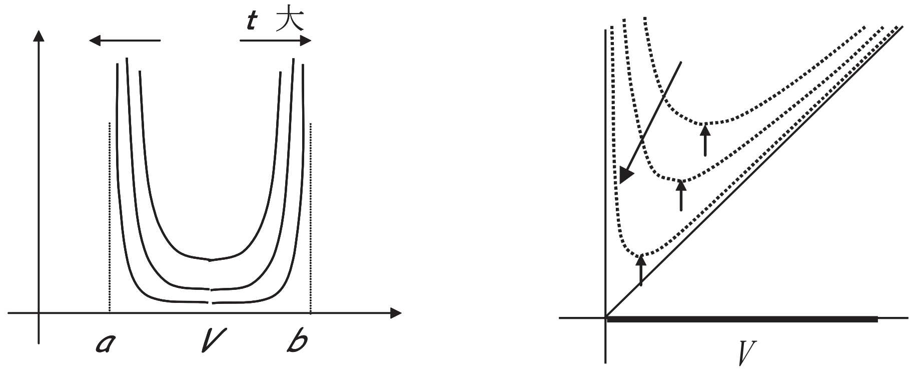

図 10.2: 内点ペナルティ関数（左）と目的関数の系列（右）

ただし，$\{t_k\}, k = 1,\ 2, \ldots,$ は狭義単調減少して 0 に収束する正の数列とする．この最適化問題において，最適解の列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ は，$k \to \infty$ に従って元の問題の最適解に収束することが知られている．

図 10.2(右) は，さきほどと同じ問題を内点ペナルティ関数法で解いた場合を示している．許容解集合の内側から最適解の 0 に向けて解の系列ができている様子がわかるであろう．

10.4 乗数法

ここでは，等式制約のもとでの最小化問題を解くラグランジュ乗数法を説明する．すなわき，最初に挙げた定式化の中で $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ という不等式制約の数が 0 個とする．また，等式制約 $h_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, l$ の関数 h_j は連続微分可能であるとする．今，この等式制約を満足する許容解集合 V の点 $\boldsymbol{x}_0$ を考え，その点からの微小ベクトル変位を $d\boldsymbol{x} = (dx_1,\ dx_2, \ldots, dx_n)^T$ とする．このとき，ベクトル $d\boldsymbol{x}$ は許容解集合 V の接ベクトルでなければならない．すなわち，$\boldsymbol{x}_0$ において

$$(A) \qquad (\nabla h_j(\boldsymbol{x}))^T d\boldsymbol{x} \ = \ 0, \ \ j = 1, \ldots, l$$

が成立しなくてはならない．これは，微小ベクトル変位 $d\boldsymbol{x}$ が，各等式制約 $h_j(\boldsymbol{x}) = 0$ で与えられる n 次元空間内の超平面（解の点がのらなくてはいけない面）の法線ベクトル $\nabla h_(\boldsymbol{x})$ と直交している–内積が 0 である–ことを表している．

また，点 $\boldsymbol{x_0}$ が関数 $f(\boldsymbol{x})$ の極小解を与えるための必要条件は，

$$(B) \qquad (\nabla f(\boldsymbol{x}))^T d\boldsymbol{x} \ = \ 0$$

が成り立たなくてはならない．この条件 (B) と条件 (A) とを同時に満足するためには，∇f が ∇h_j $(j = 1, \ldots, l)$ の一次結合であることが必要十分条件となる．すなわち，$\boldsymbol{x}_0$ において，

$$\nabla f + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \nabla h_j \ = \ 0$$

が成り立つ．ただし，$\lambda_j,\ j = 1, \ldots, l$ は 0 でない定数，また等式制約のヤコビ行列 $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}$ のランクは l であるとする．

ここで，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots,\ \lambda_l)$ に関する以下の関数を定義する．

$$L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda}) \ = \ f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j h_j(\boldsymbol{x})$$

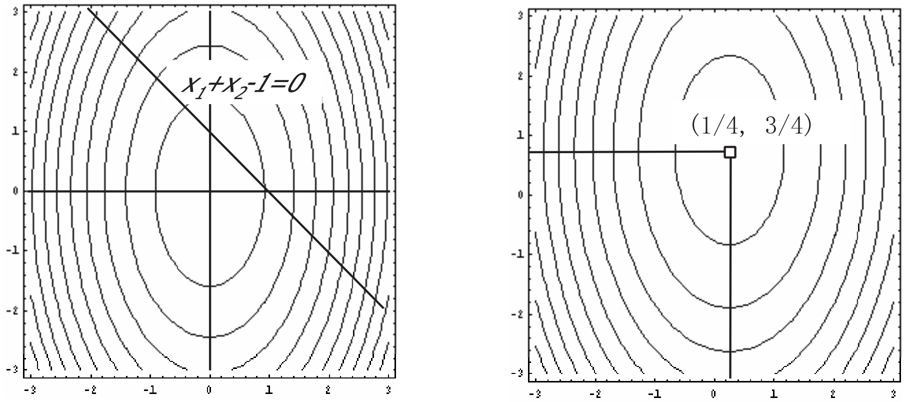

図 10.3: 目的関数および等式制約（左）とラグランジュ関数の値 ($\lambda = -0.5$)（右）

この $L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$ を**ラグランジュ関数** (Lagrangean function)，$\lambda_j,\ j = 1, \ldots, l$ を**ラグランジュ乗数** (Lagrangean multiplier) とよぶ．ラグランジュ関数を用いて停留点を与える必要条件を書き換えると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= h_j(\boldsymbol{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, l\end{aligned}$$

となり，$\nabla L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ とまとめることができる．

このように，ラグランジュ乗数を使ってラグランジュ関数を定義し，それに関する制約なし最適化を解くことによって，制約つき最適化問題を解く手法をラグランジュの**未定乗数法** (method of indeterminate coeeficients) とよぶ．ラグランジュ乗数の意味は，停留点 $\boldsymbol{x}^*$ において，

$$-\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \lambda_1 \nabla h_1(\boldsymbol{x}^*) + \ldots + \lambda_l \nabla h_l(\boldsymbol{x}^*)$$

となることから，等式制約 h_j の値の変化がもとの目的関数 f に与える影響として理解することができる．

図 10.3(左) に，前に挙げた【練習問題 10-1】の不等式制約条件を等式制約に変えたものを示している．このラグランジュ関数は，

$$L(x_1,\ x_2,\ \lambda) \;=\; (x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2) + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$$

であり，$\nabla L(x_1, x_2, \lambda) = \mathbf{0}$ を求めると，連立一次方程式より，$(x_1^*,\ x_2^*,\ \lambda^*) = (0.25,\ 0.75,\ -0.5)$ を得る．ラグランジュ関数の $\lambda = -0.5$ のときの様子を図 10.3(右) に示す．ここから，先ほど求めた $x_1^*,\ x_2^*$ は，制約なし最適化問題の極小解になっていることがみてわかるであろう．

ラグランジュの未定乗数法は，等式制約に限らず，不等式制約がついた場合に対しても拡張して同様に適用できるが，説明にはさまざまな数学的な準備が必要であり，本講義では省略する．

【参考図書】

- 今野浩，山下浩著：非線形計画法，日科技連出版社，ISBN4-8171-5306-7
- 三根　久著：オペレーションズリサーチ–数理計画法入門–上巻，朝倉書店