10　非線形計画法 (II)：制約付き問題の最適化法／補遺

【練習問題 10-1】

$x_1,\ x_2$ の 2 変数に関する制約つき非線形最適化問題

$$
\begin{aligned}
\text{最小化}\quad &: \quad f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ x_2) = x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 && (1)\\
\text{制　約}\quad &: \quad g_1(x_1,\ x_2) = -x_1 - x_2 + 1 \le 0 && (2)
\end{aligned}
$$

を外点ペナルティ関数法で解いてみよ．

【外点ペナルティ関数法】

制約なし問題における最小値は $(x_1,\ x_2) = (0,\ 0)$ の点にあり，これは制約を満足しない．この問題に対する外点ペナルティ関数を次のように定義する．

$$\psi(x_1,\ x_2) = \{\max(0,\ -x_1 - x_2 + 1)\}^2$$

これにより拡張目的関数を作ると，

$$
\begin{aligned}
F(x_1,\ x_2,\ r) &= f(x_1,\ x_2) + r\psi(x_1,\ x_2) \\
&= \begin{cases} x_1^2 + \dfrac{1}{3}x_2^2 & (x_1 + x_2 > 1 \text{ のとき}) \\[2ex] x_1^2 + \dfrac{1}{3}x_2^2 + r(1 - x_1 - x_2)^2 & (x_1 + x_2 \le 1 \text{ のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

これに関して，

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

により極小値を求めると，制約を満足しない領域においては，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= (1 + r)x_1 + rx_2 - r = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial x_2} &= 3rx_1 + (1 + r)x_2 - 3r = 0
\end{aligned}
$$

となり，この連立一次方程式を解くと，

$$x_1 = \frac{r}{4r + 1},\ x_2 = \frac{3r}{4r + 1}$$

いま，$r \to \infty$ で，$x_1 \to \dfrac{1}{4},\ x_2 \to \dfrac{3}{4}$ となる．この点は許容解の境界（すなわちある制約で 0 を与える点）であり，この問題の最小値 $\dfrac{1}{4}$ を与える．

【内点ペナルティ関数法】

同様に内点ペナルティ関数法で考える．拡張目的関数を次のようにおく．

$$F(x_1,\ x_2,\ t) = x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 - t\log\frac{1}{x_1 + x_2 - 1}$$

ただし，ここでは制約を満足する内点の領域のみを考えることとし，x_1 x_2 は制約 $x_1 + x_2 \geq 1$ を満足するものとする．これについて外点ペナルティ関数法と同様に拡張目的関数 F を x_1，x_2 で偏微分したものを考え，それらがすべて 0 となる極小解を求める．連立方程式は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 2x_1 - \frac{t}{x_1 + x_2 - 1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= \frac{2}{3}x_2 - \frac{t}{x_1 + x_2 - 1} = 0 \end{aligned}$$

これを x_1，x_2 について t をパラメータにして解くと，

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1+8t}}{8},\ x_2 = \frac{3 + 3\sqrt{1+8t}}{8}$$

となる．($t \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 1$ である点に注意)

ここで，$t \to 0$ とすると，$x_1 \to \dfrac{1}{4},\ x_2 \to \dfrac{3}{4}$ となり，得られる解は $(x_1,\ x_2) = (1/4,\ 3/4)$ で外点ペナルティ関数法の結果と一致する．

【ラグランジュの未定乗数法】

先ほどの不等式制約を等式制約に変えて問題を解いてみることにする．ラグランジュ関数はテキストに記載されている通り

$$L(x_1,\ x_2,\ \lambda) = (x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2) + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$$

であり，これに関する停留点 $\nabla L(x_1, x_2, \lambda) = \mathbf{0}$ を求めると，

$$L(x_1,\ x_2,\ \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + \lambda \\ \dfrac{2}{3}x_2 + \lambda \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．今回の問題では連立一次方程式となるので容易に解くことができる．これを解くと

$$(x_1,\ x_2,\ \lambda) = (\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$$

を得る．先ほど計算した外点ペナルティ関数法，内点ペナルティ関数法の結果と一致している．