

12 主観的評価に基づく最適化

今回の講義では、人の感じる価値—主観的評価—を、どのようにして定量化し、最適化の問題として扱うか、ということを考える。対象が離散的であり、組み合わせで与えられるここでは、効用 (utility) という概念と、実践的な手法として、階層分析法 (Analytic Hierarchy Process: AHP) について解説する。

12.1 価値と効用

これまでの最適化の話においては、目的関数の最小値や最大値を与えるものを最適な解として考えていた。それでは、最適、あるいは最良とは一体、なんだろうか、という問いかけを考えると、最後にはわたしたちの持つ価値の体系に行き着く。

今、 A と B のふたつがあり、どちらがより好ましいか、という比較判断が可能であるとき、この比較される両者の価値を序数的価値とよび、その優劣を選好順序と呼ぶ。選好順序を \prec で表したときに、以下の関係を考える。

1. $A \prec A$
2. $A \prec B, B \prec C$ ならば $A \prec C$
3. 任意の A と B に関して、 $A \prec B$ または $B \prec A$

最初の2つが成り立つとき、 \prec を半順序とよぶ。また、これに加えて最後が成り立つときに全順序とよぶ。

こうした選好順序に対して、一次元の実数 u で表現した数を効用 (utility) とよぶ。ここで、選好順序と効用との間には以下のことが成立していなくてはならない。

$$u(A) \leq u(B) \iff A \prec B$$

ここで、 $u(\bullet)$ は効用関数と呼ばれる。すなわち、効用関数とは選好順序を保存した形で、選好の度合いを1次元の実数に対応つけるものである。こうして定量化された価値を基数的価値と呼ぶ。

12.2 聖ペテルスブルグの逆説

われわれが基数的価値として日常で用いている代表的なものは、ものやサービスに与えられた金銭の値である。ラーメンが600円、アルバイトが時間800円などである。ただし、万能と思われる金銭の値も必ずしも我々の持つ価値を正確に表しているわけではない。その例がD. ベルヌーイによって示された以下の内容である。

【聖ペテルスブルグの逆説 (St. Petersburg's paradox)】

いま、コインを投げて表が出るまで投げ続けるものとする。そして、1回目に表が出れば2円、2回目に表が出れば4円、 n 回目ならば 2^n 円、もらえるものとする。さて、この賭に対して、一体、いくら賭金ならば参加してもよいか？(結果は講義で解説)

さて、この例が示すように我々の価値判断はかならずしも金銭の額と線形の関係にないことがわかる。

12.3 限界効用逓減の法則

一般にわれわれの持つ金銭感覚は、所持金が多くなればなるほど、1円のもつ価値が低くなっていくと考えられる¹。このことは、効用関数 $u(x)$ においては、その一次微分 $u'(x)$ がだんだんと小さな値になっ

¹ただし、金持ちほど吝嗇家で細かな金にうるさい、という説もある。

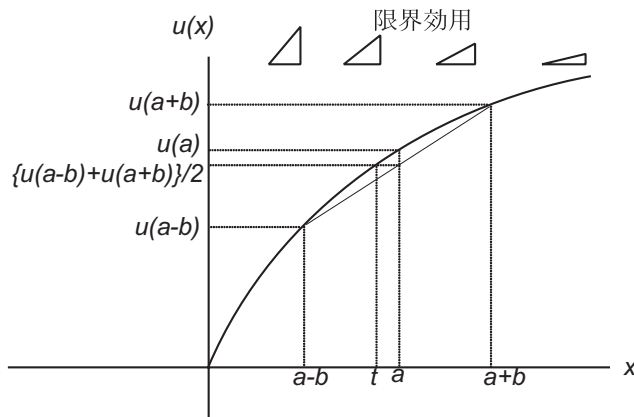


図 12.1: 効用曲線と限界効用逓減

ていく ($\ddot{u}(x) < 0$) ことを表している．このことを，限界効用逓減の法則 (law of diminishing marginal utility) と呼ぶ．

いま，所持金が a で，0.5 の確率で $a-b$ と 0.5 の確率で $a+b$ という金になるくじを考える．このくじの後の金額の期待値は $0.5 \times (a-b) + 0.5 \times (a+b) = a$ で変化がない．期待効用は $(u(a-b) + u(a+b))/2$ であるが，この効用の値を与える金額を t とする²と，図 12.1 のような効用曲線のもとでは， $t < a$ である．すなわち，くじに参加した場合の効用は，参加しない場合の効用よりも小さく，くじに参加しない方が”得”と感じる．すなわち，リスクを避けるような行動をとることになる．

こうした効用曲線の非線形性によって，所得税の累進課税，保険や宝くじを買う理由，財産三分法などについての理由付けをすることができる．

12.4 最適化における複数の評価要因

現実問題を最適化問題として扱う際に，何を目的関数とすればよいか，というのは大きな課題となる．例えば，旅行の交通手段を考えると，所要時間，価格，快適さ，確実性など，さまざまな評価要因が関係してくる．また，多くの場合においては，考えら得る選択肢において，これらの評価要因はトレードオフの関係にある．すなわち，航空機を利用すると鉄道よりも時間は短いが高値が高い，などである．こうした複数の選択肢があり，評価要因が複数ある問題において，最適な解を選び出すためには，図 12.2 に示すような構造を考えることが有効である．

総合評価に対する各評価要因 $i (i = 1, \dots, M)$ の重みを f_i ，評価要因 i に対する各選択肢 $j (j = 1, \dots, N)$

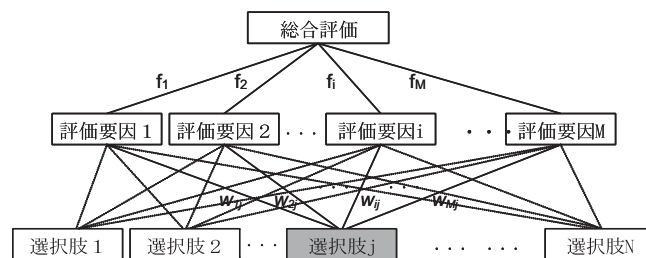


図 12.2: 複数の評価要因に対する評価手法

²この値を確実同値額とよぶ

の重みを w_{ij} としたときに、選択肢 j の総合評価値 F_j は以下のように計算できる。

$$F_j = f_1 w_{1j} + f_2 w_{2j} + \dots + f_i w_{ij} + \dots + f_M w_{Mj}$$

こうした手法を行う上で問題となるのが、重み f_i , w_{ij} をどのようにして決定するか、という点にある。たとえば、10 個の評価要因に対して総合的に値を与えるのは、思いの外、難しい。そうした問題に対して実用的な手法を与えているのが、次に述べる階層分析法である。

12.5 階層分析法

T.Saaty によって考案された階層分析法 (Analytic Hierarchy Process: AHP) はこうした重み (重要度) を 2 者の比較により決定する点が特長である。

今、評価要因 F_1, F_2, \dots, F_M に関して、その中の 2 つの評価要因 F_p, F_q の重要度を比較して、定数 α_{pq} を以下のように定義する。

$$\alpha_{pq} = \begin{cases} 1, & F_p \text{ と } F_q \text{ の重要度に差がないとき} \\ 3, & F_p \text{ の方が } F_q \text{ より”やや重要”なとき} \\ 5, & F_p \text{ の方が } F_q \text{ より”かなり重要”なとき} \\ 7, & F_p \text{ の方が } F_q \text{ より”ずっと重要”なとき} \\ 9, & F_p \text{ の方が } F_q \text{ より”決定的に重要”なとき} \end{cases}$$

また、上記の中間的な評価との時には、2, 4, 6, 8 などを与える。また、 F_q と F_p との評価が逆転しているときには、 $1/3, 1/5, 1/7, 1/9$ のように逆数を与えることとする。これにより、 M 個の評価要因に対して M 行 M 列の正方行列 $A = \{\alpha_{pq}\}$ を、評価要因の重要度の比の行列 A の

$$P = \begin{pmatrix} 1 & f_1/f_2 & \dots & f_1/f_i & \dots & f_1/f_M \\ f_2/f_1 & 1 & \dots & f_2/f_i & \dots & f_2/f_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ f_i/f_1 & f_i/f_2 & \dots & 1 & \dots & f_i/f_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_M/f_1 & f_M/f_2 & \dots & f_M/f_i & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

の近似行列になっていると考えられる。この行列 P は、その要素の定義から

$$Pf = Mf$$

という関係が成り立つ。ただし、 $f = (f_1 f_2 \dots f_M)^T$ である。よって、評価要因の一对比較で作成した行列 A に関しても上の P と同様の関係が成立すると考える。

$$Af = \alpha f$$

このとき、 α は行列 A の固有値、 $(f_1 f_2 \dots f_M)^T$ は固有ベクトルになっている。ただし、行列 A はあくまで行列 P の近似であるため、どのくらいよい近似になっているか、と評価する必要がある。一般には、次の一貫性係数が用いられる。

$$\lambda = \frac{\alpha - M}{M - 1}$$

これで $\lambda \leq 0.1$ であれば合格、 $\lambda \geq 0.15$ ならば不合格で比較のやり直しが必要である。

これによって総合評価に対する各評価指標の重要度 f_i が、一对比較の結果より決定させる。同様に、各評価指標に対する各選択肢の重要度 w_{ij} を、選択肢の一对比較によって決定する。

ここで具体例で階層分析法を考えてみよう。

【昼食選択問題】

北大で昼食をとる場所を考える．選択肢は

$C1$: 工学部食堂 $C2$: 北部食堂 $C3$: はるにれ $C4$: エルム $C5$: 中央食堂 $C6$: 弁当

の6つ．また，評価要因としては，

$F1$: アクセス性 $F2$: 値段 $F3$: 雰囲気 $F4$: メニューの豊富さ $F5$: 混雑度

の5要因を考える．昼食をとる場所としてどこがもっとも良いであろうか？

この問題に対して，小野里の評価要因の一对比較が次のようになったとする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1/2 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 2 \\ 1/2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

正方行列の対角成分がすべて1，対照な要素間ではすべて $\alpha_{ij} = 1/\alpha_{ji}$ となっていることに留意せよ．この5行5列の正方行列に関して最大の固有値と固有ベクトルを近似計算により求めると，

$$\alpha = 5.18, f_1 = 0.291, f_2 = 0.097, f_3 = 0.226, f_4 = 0.323, f_5 = 0.063,$$

となり，評価要因としては $F4$ のメニューの豊富さが最大の値，一貫性係数は0.046で合格となっている．

同様に w_{ij} についても固有値，固有ベクトルを求めることで，図12.2で示した評価手法の重みをすべて定めることができる．小野里の評価結果は， $C1, \dots, C6$ に対する総合評価値が，

$$C1: 0.183 \quad C2: 0.289 \quad C3: 0.137 \quad C4: 0.147 \quad C5: 0.123 \quad C6: 0.121$$

となり，選択肢 $C2$ —北部食堂で昼食—が最も高い総合評価値を持つ選択となり，それから少し差があいて工学部食堂という選択肢が第二候補となることがわかる．

以上に説明してきた階層分析法の特徴と適用の上の注意点は以下ようになる．

- 直接に個々の重要度を決定するのと比べると，一对比較により重要度の比を決定する方が容易である．
- 一对比較の評価の多少のブレに対して頑強である．
- 評価要因や選択肢の数が増えると，一对比較の数が大きくなり，評価に時間がかかる．
- 重要度の比は $1/9 \sim 9$ の範囲であるため，要因間で重要度に非常に大きな差がある場合には適用できない．そうしたケースでは，重要度の小さな評価要因や選択肢をグループ化することが必要となる．

【参考文献】

- 松原望著：「意思決定の基礎」，朝倉書店
- 今野浩著：「数理決定法入門／キャンパスのOR」，朝倉書店